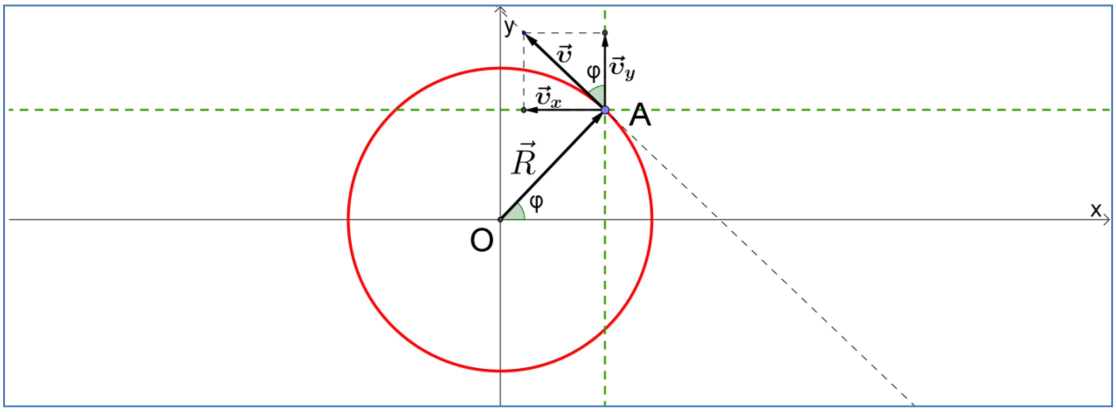
Κεντρομόλος Επιτάχυνση:

Έστω υλικό σημείο Α μάζας m, το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ίση με R με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ. Να αποδειχτεί ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_k$ έχει:

(α) μέτρο ίσο με $\alpha_k = \dfrac{\upsilon^2}{R}$.

(β) κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

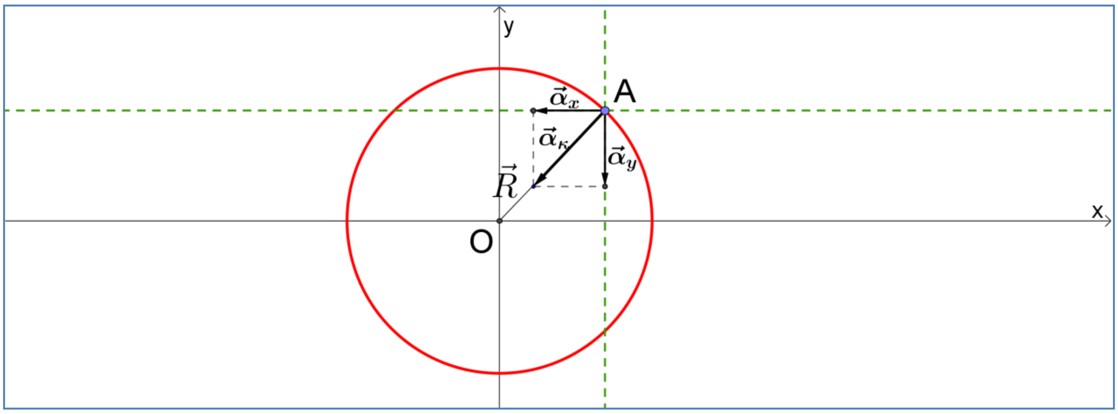
Λύση: (α) Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στην αρχή αυτών των αξόνων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ένα χρονικό διάστημα Δt κατά το οποίο το σημείο Α βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο:



Έστω $\vec{\upsilon}$ το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α το οποίο από υπόθεση έχει σταθερό μέτρο υ. Αναλύουμε το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\upsilon}_x$ και $\vec{\upsilon}_y$ όπως φαίνεται στο σχήμα παραπάνω. Τότε θα ισχύει ότι $\upsilon_x = -\upsilon\eta\mu\varphi$ και $\upsilon_y = \upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi$. Το «–» στον τύπο του υ_x προκύπτει από το γεγονός ότι το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_x$ έχει αρνητική φορά. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, προκύπτει ότι $\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \upsilon^2$. Η γωνία φ έχει τύπο φ=ω·t, όπου $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (ω είναι η γωνιακή ταχύτητα και Τ η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης).

Άρα $\upsilon_x = \upsilon_x(t) = -\upsilon\eta\mu(\omega t)$ και $\upsilon_y = \upsilon_y(t) = \upsilon\sigma\upsilon\nu(\omega t)$.

- Η επιτάχυνση που προκύπτει στο οριζόντιο άξονα δίνεται από τον τύπο $\alpha_x = \alpha_x(t) = \upsilon_x'(t) = -\upsilon\sigma\upsilon\nu(\omega t)\cdot(\omega t)' = -\upsilon\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t)$.
- Η επιτάχυνση που προκύπτει στο οριζόντιο άξονα δίνεται από τον τύπο $\alpha_y = \alpha_y(t) = \upsilon_y'(t) = \upsilon\cdot[-\eta\mu(\omega t)]\cdot(\omega t)' = -\upsilon\omega\eta\mu(\omega t)$.

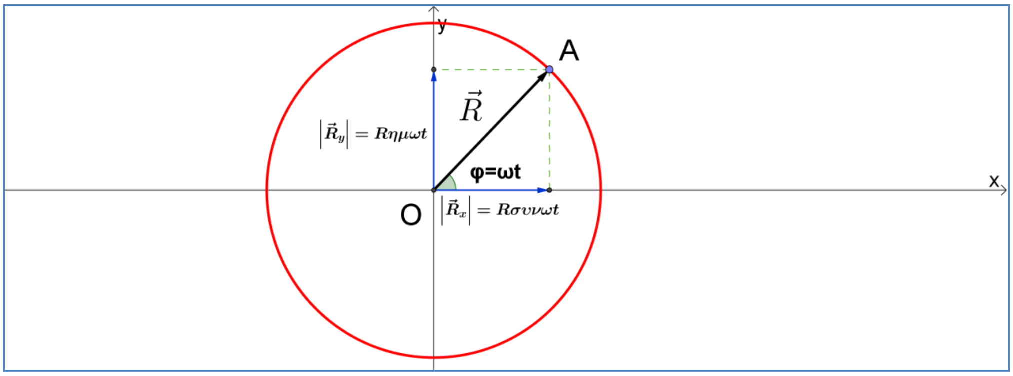


Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος προκύπτει για το μέτρο α_κ της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\kappa$ ότι :

$\alpha_\kappa^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \upsilon^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) + \upsilon^2\omega^2\eta\mu^2(\omega t) = \upsilon^2\omega^2$. Άρα το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}_\kappa$ ισούται με $\alpha_\kappa = \upsilon\omega = \upsilon\cdot\frac{2\pi}{T} = \upsilon\cdot\frac{2\pi R}{T}\cdot\frac{1}{R} = \upsilon\cdot\upsilon\cdot\frac{1}{R} =$

$$= \frac{\upsilon^2}{R}.$$

(β) Έστω $\vec{R}$ το διάνυσμα της επιβατικής ακτίνας.



Τότε ισχύει ότι $\vec{R} = (R\sigma\upsilon\nu\omega t, R\eta\mu\omega t)$ και $\vec{\alpha}_\kappa = (\alpha_x, \alpha_y) = (-\upsilon\omega\sigma\upsilon\nu\omega t, -\upsilon\omega\eta\mu\omega t)$. Για το συνημίτονο της γωνίας $\left(\vec{R}, \hat{\ } \vec{\alpha}_\kappa\right)$ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{R}$ και $\vec{\alpha}_\kappa$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{R}, \hat{\ } \vec{\alpha}_\kappa\right) = \frac{\vec{R} \cdot \vec{\alpha}_\kappa}{\left|\vec{R}\right| \cdot \left|\vec{\alpha}_\kappa\right|} = \frac{-\upsilon\omega R\sigma\upsilon\nu^2\omega t - \upsilon\omega R\eta\mu^2\omega t}{R \cdot \upsilon \cdot \omega} = -\left(\sigma\upsilon\nu^2\omega t + \eta\mu^2\omega t\right) = -1.$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{R}$ και $\vec{\alpha}_\kappa$ είναι αντίρροπα και επειδή το $\vec{\alpha}_\kappa$ έχει αρχή το σημείο Α, έπεται ότι έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.